descobrir caminhos

multiplicar possibilidades

VESTIBULAR 2005 UFMG

MATEMÁTICA

Prova de 2ª Etapa

SÓ ABRA QUANDO AUTORIZADO.

Leia atentamente as instruções que se seguem.

1 - Este caderno contém **nove** questões, constituídas de itens e subitens, abrangendo um total de **onze** páginas, numeradas de 3 a 13.
Antes de começar a resolver as questões, verifique se seu caderno está **completo**.
Caso haja algum problema, solicite a **substituição** deste caderno.

2 - Esta prova vale **100** pontos, assim distribuídos:
- Questões 01, 03, 04, 05, 06, 07, 08 e 09: **11** pontos cada uma.
- Questão 02: **12** pontos.

3 - **NÃO escreva seu nome nem assine nas folhas desta prova.**

4 - Leia cuidadosamente cada questão da prova e escreva a solução, **A LÁPIS**, nos espaços correspondentes.
Só será corrigido o que estiver dentro desses espaços.
NÃO há, porém, obrigatoriedade de preenchimento **total** desses espaços.

5 - **NÃO serão consideradas respostas sem exposição de raciocínio.**

6 - Não escreva nos espaços reservados à correção.

7 - Ao terminar a prova, entregue este caderno ao aplicador.

FAÇA LETRA LEGÍVEL

Duração desta prova: TRÊS HORAS.

Impressão digital do polegar direito

2ª vez

1ª vez

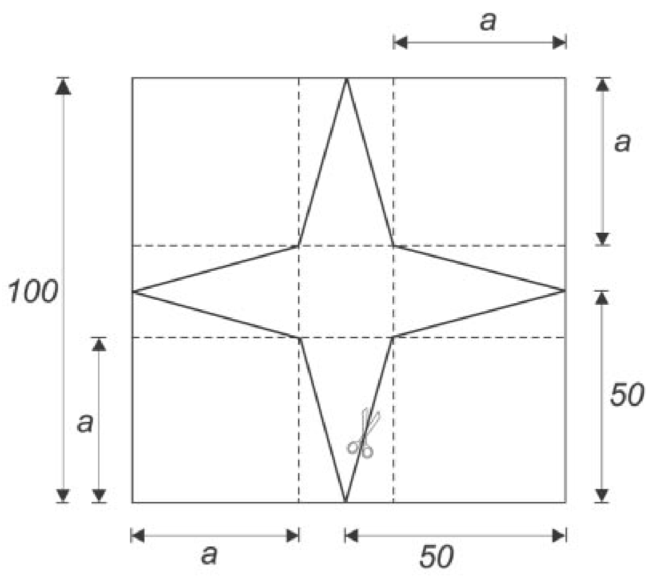
ATENÇÃO: Terminada a prova, recolha seus objetos, deixe a sala e, em seguida, o prédio. A partir do momento em que sair da sala e até a saída do prédio, continuam válidas as proibições ao uso de aparelhos eletrônicos e celulares, bem como não lhe é mais permitido o uso dos sanitários.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

COLE AQUI A ETIQUETA

QUESTÃO 01 (Constituída de **três** itens.)

Uma pirâmide de base quadrada é construída recortando-se e dobrando-se uma cartolina quadrada de 100 *cm* de lado, como mostrado nesta figura:



Considerando essas informações,

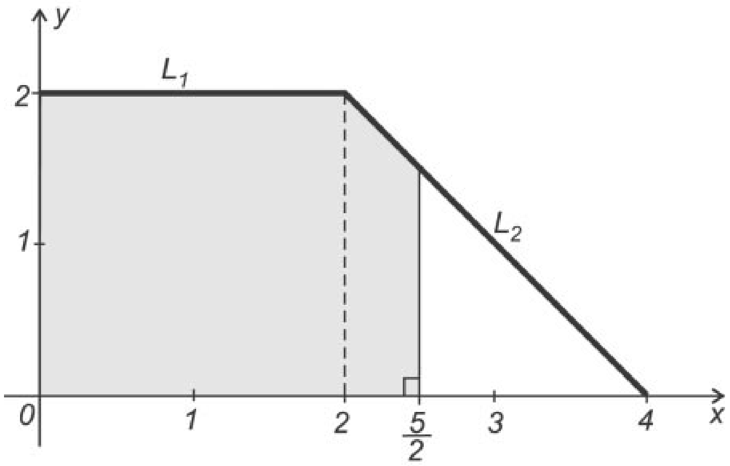
1. **DETERMINE** a altura da pirâmide em função de *a*.

2. **DETERMINE** o volume da pirâmide em função de *a*.

3. **DETERMINE** os valores de *a* para os quais se pode construir uma pirâmide da maneira descrita.

QUESTÃO 02 (Constituída de **três** itens.)

Observe esta figura:



Nessa figura, L_1 e L_2 são segmentos de reta que ligam os pontos (0,2), (2,2) e (4,0).

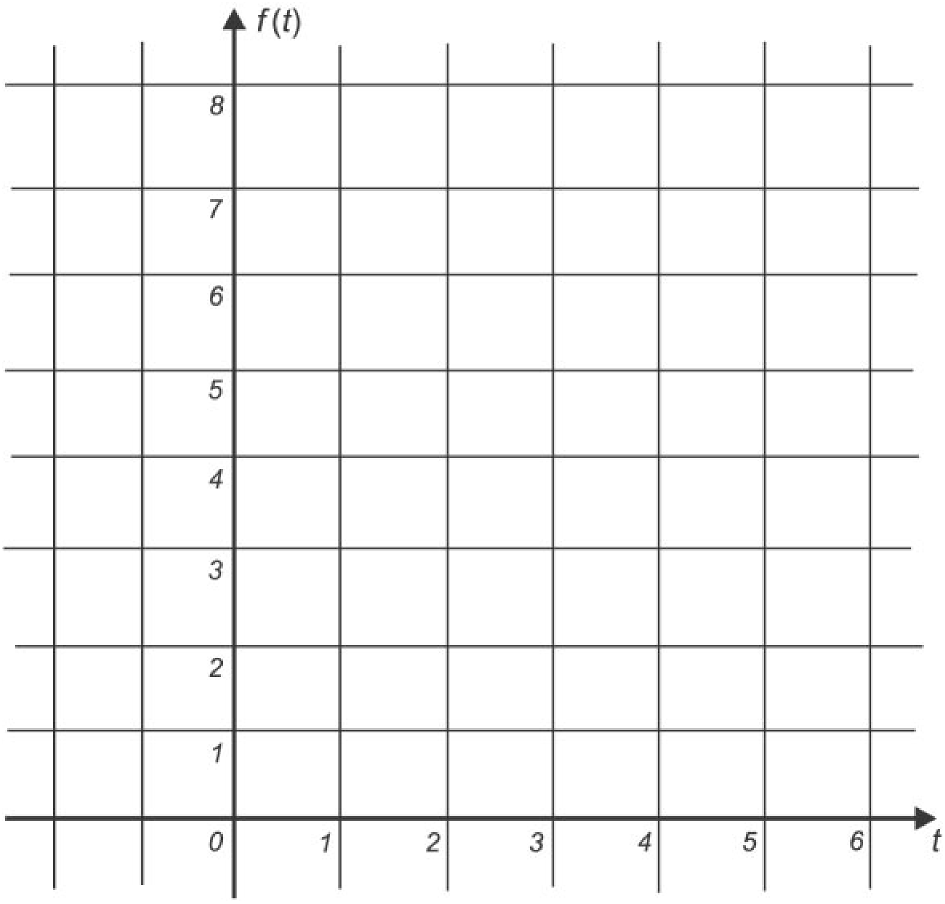
Uma função $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida associando-se a cada $t \in [0,4]$ o valor da área da região limitada pelas retas $x = 0$, $x = t$, $y = 0$ e a poligonal formada pelos segmentos L_1 e L_2.

Por exemplo, o valor de $f\left(\frac{5}{2}\right)$ é a área da região sombreada na figura.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** os valores de $f(1)$ e $f(3)$.

2. **DETERMINE** as expressões de $f(t)$ para $0 \leq t \leq 2$ e para $2 < t \leq 4$.


f(t)
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
t

QUESTÃO 03 (Constituída de **três** itens.)

Sejam C_1 e C_2 circunferências de, respectivamente, centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2.
A equação de C_1 é $x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0$ e a equação de C_2 é $x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0$.
Sejam A e B os pontos de interseção de C_1 e C_2.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** as coordenadas de O_1 e O_2 e os raios r_1 e r_2.

2. **DETERMINE** as coordenadas de A e B.

3. **CALCULE** a área do quadrilátero AO_1BO_2.

QUESTÃO 04 (Constituída de **dois** itens.)

Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ um polinômio em que a e b são números inteiros.

Sabe-se que $1+\sqrt{2}$ é uma raiz de $p(x)$.

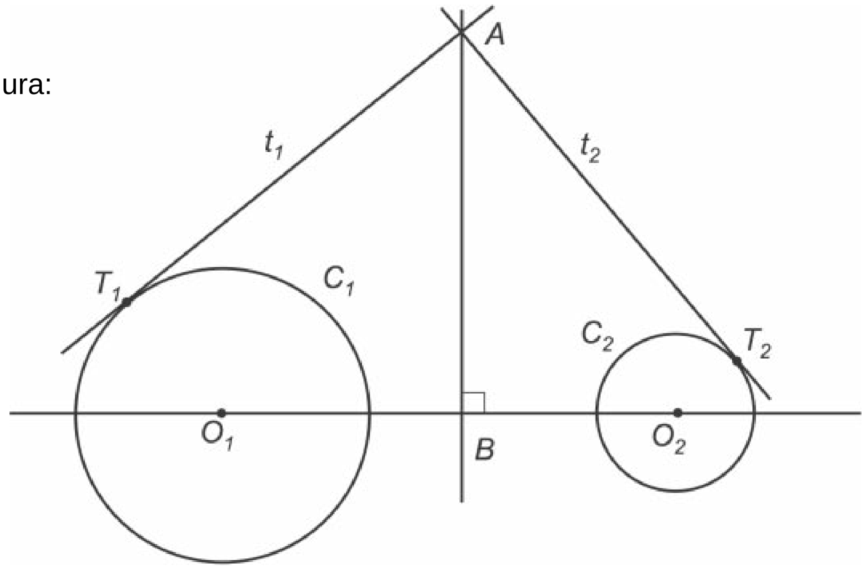
Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** os coeficientes a e b.

2. **DETERMINE** todas as raízes de $p(x)$.

QUESTÃO 05

Observe esta figura:



Nessa figura, as retas t_1 e t_2 são tangentes às circunferências C_1 e C_2, respectivamente, nos pontos T_1 e T_2. A reta AB é perpendicular à reta que passa pelos centros O_1 e O_2 das circunferências.

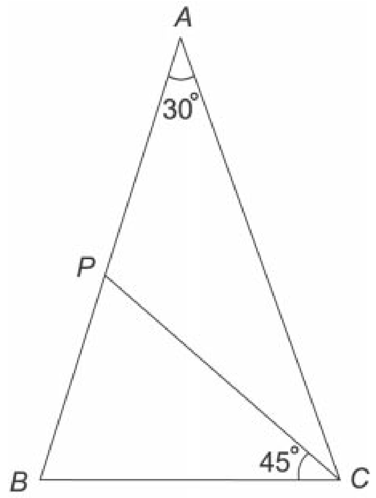
Sabe-se, também, que

- $\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$;
- o raio de C_1 é 5 e o raio de C_2 é 1; e
- $\overline{O_1O_2} = 12$.

Assim sendo, **CALCULE** $\overline{O_1B}$ e $\overline{O_2B}$.

QUESTÃO 06 (Constituída de **dois** itens.)

Observe esta figura:



Nessa figura, os comprimentos dos segmentos *AB* e *AC* são iguais. O comprimento do segmento *BC* é 1.

Considerando essas informações,

1. **CALCULE** o comprimento do segmento *CP.*

2. **CALCULE** a área do triângulo *ACP*.

QUESTÃO 07

DETERMINE todos os números complexos z que satisfazem estas condições:

- $|z+3| - 2\bar{z} = 3+6i$
- $|z| < 4$.

QUESTÃO 08 (Constituída de **três** itens.)

Para um grupo de 12 pessoas, serão sorteadas viagens para três cidades distintas **A**, **B** e **C**. Cinco dessas pessoas irão para a cidade **A**; quatro, para a cidade **B**; e três, para cidade **C**.

Nesse grupo, estão Adriana, Luciana e Sílvio, que são amigos e gostariam de ir para a mesma cidade.

Considerando essas informações, **RESPONDA**:

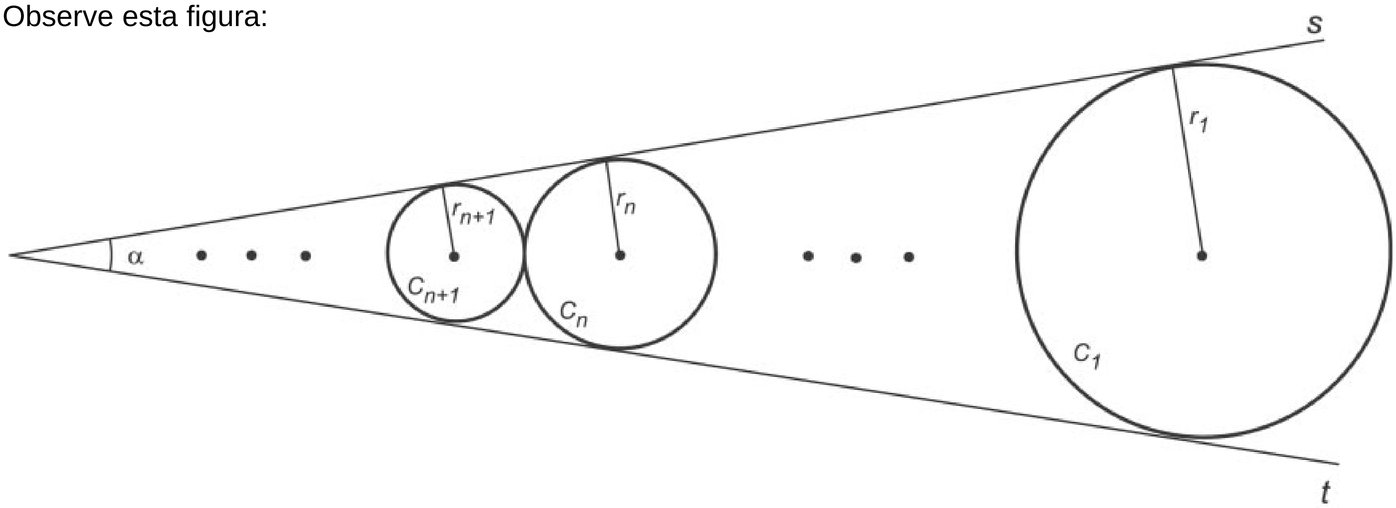
1. De quantas maneiras distintas se podem sortear as viagens de modo que Adriana, Luciana e Sílvio viajem para a cidade **A**?

2. De quantas maneiras distintas se podem sortear as viagens de modo que Adriana, Luciana e Sílvio viajem para a mesma cidade?

3. Qual é a probabilidade de Adriana, Luciana e Sílvio viajarem para a mesma cidade?

QUESTÃO 09 (Constituída de **três** itens.)

Observe esta figura:



Nessa figura, está representada uma seqüência infinita de círculos C_1, C_2, C_3, ..., que tangenciam as retas s e t. Cada círculo C_n tangencia o próximo círculo C_{n+1}.

Para todo número natural positivo n, r_n é o raio do círculo C_n.

Sabe-se que:

- $\alpha = 60^o$;
- $r_1 = 1$.

Considerando essas informações,

1. **MOSTRE** que $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{1}{3}$ para todo n.

2. **DETERMINE** r_n em função de n.

3. **CALCULE** a soma das áreas de todos os círculos C_1, C_2, C_3, ...

descobrir caminhos

multiplicar possibilidades

VESTIBULAR 2005 UFMG