

MATEMÁTICA

COLE AQUI A ETIQUETA.

SÓ ABRA QUANDO AUTORIZADO.

Leia atentamente as instruções que se seguem.

1 - Este caderno contém **dez** questões, constituídas de itens e subitens, abrangendo um total de **dez** páginas, numeradas de 2 a 11.

Antes de começar a resolver as questões, verifique se seu caderno está **completo**.

Caso haja algum problema, solicite a **substituição** deste caderno.

2 - Esta prova vale **100** pontos: **10** pontos por questão.

3 - **NÃO escreva seu nome nem assine nas folhas desta prova.**

Escreva seu **número de inscrição** completo nos espaços reservados para esse fim.

4 - Leia cuidadosamente cada questão da prova e escreva a resposta, **A LÁPIS**, nos espaços correspondentes.

Só será corrigido o que estiver dentro desses espaços. **NÃO** há, porém, obrigatoriedade de preenchimento **total** desses espaços.

5 - **NÃO serão consideradas respostas sem exposição de raciocínio.**

6 - Não escreva nos espaços reservados à correção.

7 - Ao terminar a prova, entregue este caderno ao aplicador.

FAÇA LETRA LEGÍVEL

Duração desta prova: TRÊS HORAS.

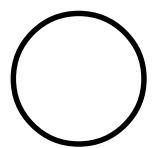
ATENÇÃO: Terminada a prova, após a entrega do caderno, você deve retirar-se imediatamente do prédio, onde lhe é vedado, a partir de então, permanecer nos corredores, usar as instalações sanitárias ou quaisquer aparelhos eletrônicos, inclusive celulares.



QUESTÃO 01

Sejam $f(x) = x^2 + 3x + 4$ e $g(x) = ax + b$ duas funções.

DETERMINE as constantes reais a e b para que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todo x real.



QUESTÃO 02

Considere o sistema

$$\begin{cases} y + x^2 - 4x = -3 \\ y - ax = -2 \end{cases},$$

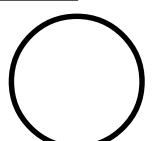
com incógnitas x e y .

1. **CALCULE** os valores de a para os quais o sistema tem uma **única** solução.

2. **RESPONDA:**

Existe algum valor de a para o qual esse sistema tem **mais de duas** soluções?

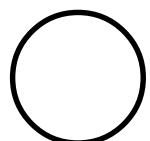
JUSTIFIQUE sua resposta.



QUESTÃO 03

Considere a parábola de equação $y = 8x - 2x^2$ e a reta que contém os pontos $(4,0)$ e $(0,8)$. Sejam A e B os pontos da interseção entre a reta e a parábola.

DETERMINE a equação da mediatrix do segmento AB .

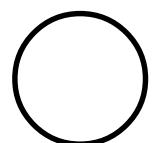


QUESTÃO 04

Um avião, em vôo retilíneo horizontal, passa por um ponto na vertical acima da cabeça de uma pessoa situada no solo. Em um determinado momento, essa pessoa registra que o ângulo de elevação do avião, em relação ao solo, é de 60° e que, 15 segundos depois desse registro, é de 45° .

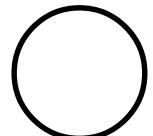
Suponha que o avião voa a uma velocidade constante de 720 km/h e despreze a altura da pessoa.

CALCULE a altura em que estava o avião quando passou acima da cabeça da pessoa.



QUESTÃO 05

Sabendo-se que $p(1 + 2i) = 0$, CALCULE todas as raízes do polinômio $p(x) = x^5 + x^4 + 13x^2 + 5x$.



QUESTÃO 06

Um baralho é composto por 52 cartas divididas em quatro naipes distintos. Cada naipe é constituído por 13 cartas — 9 cartas numeradas de 2 a 10, mais Valete, Dama, Rei e Ás, representadas, respectivamente, pelas letras J, Q, K e A.

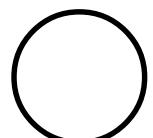
Um par e uma trinca consistem, respectivamente, de duas e de três cartas de mesmo número ou letra. Um *full hand* é uma combinação de cinco cartas, formada por um par e uma trinca.

Considerando essas informações, **CALCULE**

1. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis e uma trinca de 2.

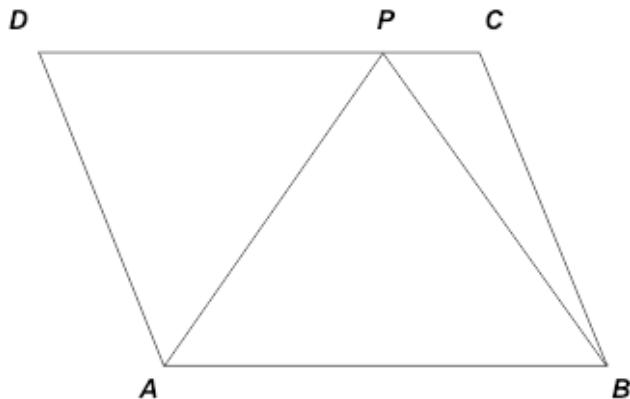
2. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis.

3. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand*.

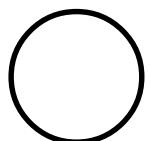


QUESTÃO 07

No paralelogramo $ABCD$, da figura abaixo, o ponto P , contido no lado CD , é tal que o segmento PC mede 4 cm , os segmentos AP e PB medem 14 cm cada um e os ângulos $D\hat{A}P$ e $P\hat{A}B$ têm a mesma medida.



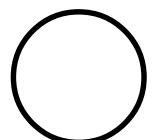
DETERMINE a medida do lado AD .



QUESTÃO 08

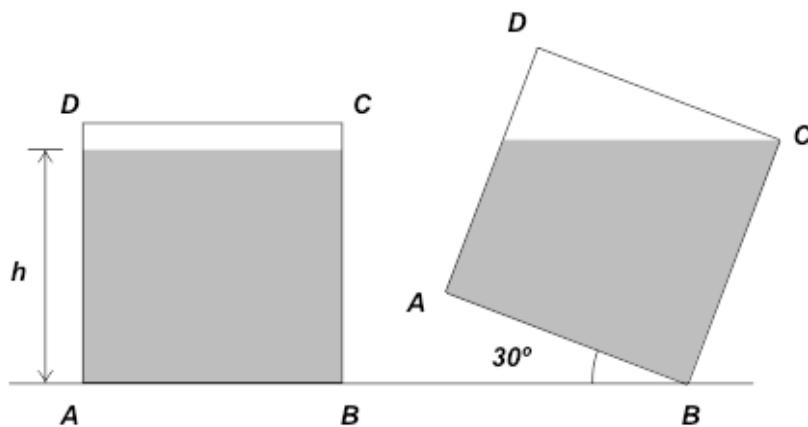
Sejam n um número inteiro positivo e z um número complexo tal que $|z|=1$ e $1+z^{2n} \neq 0$.

CALCULE a parte imaginária de $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

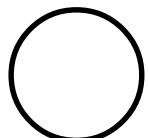


QUESTÃO 09

Um recipiente cúbico, sem tampa, com arestas medindo 12 cm, está apoiado em um plano horizontal e contém água até um nível de h cm. Ao se inclinar esse recipiente sobre uma de suas arestas, de maneira que a face inferior faça um ângulo de 30° com o plano horizontal, são derramados 300 cm^3 de água, conforme mostrado nestas figuras.



DETERMINE o valor de h .



QUESTÃO 10

Considere um tetraedro regular de vértices A , B , C e D , cujas arestas medem r .

Considere, ainda, que M e N são pontos médios das arestas BD e CD , respectivamente.

CALCULE a área do triângulo AMN .

